Colle du 9 janvier: Réduction

12.1 Première série

Exercice 1: Soit $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 2: Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_2(K)$. Montrer qu'il existe un triplet $(a, b, c) \in K^3 - \{0\}$ tel que $aA + bB + cC$ admet une valeur propre double.

Exercice 3: Soit E un K-espace vectoriel de finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes: (i) Tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u; (ii) Le polynôme minimal de u est sans facteur carré.

Exercice 4: **1.** Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $(M_1, ..., M_m) \in G^m$ une base de $Vect(G)$, et $f : G \to \mathbb{C}^m$ l'application qui à $A \in G$ associe $(Tr(AM_i))$. Montrer que, si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
2. *(Théorème de Burnside)* On suppose que G est d'exposant fini, c'est-à-dire qu'il existe $N > 0$ entier tel que $A^N = I_n$ pour tout $A \in G$. Montrer que G est fini.

12.2 Deuxième série

Exercice 1: Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et ayant n valeurs propres deux à deux distinctes de module inférieur ou égal à 1. Montrer que ce sont des racines de l'unité.

Exercice 2: Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si p est un nombre premier impair, la réduction modulo p de $GL_n(\mathbb{Z})$ dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ restreinte à G est injective. En déduire qu'à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 3: Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A nilpotente et $B = AP(A)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $P(0) = 1$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 4: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par: $\phi(X) = MX + X({}^tM)$. Donner les valeurs propres (avec multiplicités) de cet endomorphisme en fonction des valeurs propres de M.

12.3 Troisième série

Exercice 1: Selon que $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, dire si l'affirmation suivante est vraie:

$$(\exists A \in \mathcal{M}_n(K), A^2 + 2A + 5 = 0) \Leftrightarrow 2|n$$

Exercice 2: Soit B l'espace des suites bornées de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Notons $T : B \to B$ l'endomorphisme qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Déterminer tous les sous-espaces de dimension finie de B stables par T.

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t'il $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^m = I_n$, alors $M^r = I_n$?

Exercice 4: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)^2 = A$.